ファジイランダム変数とその応用(連続と離散の最適化数理)

AUTHOR(S):

片桐, 英樹; 石井, 博昭; 伊藤, 健

CITATION:

片桐, 英樹 ...[et al]. ファジイランダム変数とその応用(連続と離散の最適化数理). 数理解析研究所講究録 1997, 981: 95-103

ISSUE DATE:

1997-03

URL:

http://hdl.handle.net/2433/60891

数理解析研究所講究録
981 巻 1997 年 95-103

ファジイランダム変数とその応用

片桐 英樹, 石井 博昭, 伊藤 健 (大阪大学)

本論文では制約式の定数項がファジイランダム変数である線形計画問題に対して、意思決定法の一つを提案する。この問題における最適基準として可能性測度と確率測度を用い、確率計画法における機会制約計画として定式化する。このモデルにおいては制約式の成り立つ確率一定のもとで可能性測度を最大化する。

1 はじめに

これまで，さまざまな問題において不確実性、または不確定性を含む状況下における意思決定法が研究されてきた．前者は確率変数を導入し，また，後者はファジイ変数を用いることにより，不確実，または不確定な要素を表わしてきた．数理計画問題においては、それぞれ確率計画法、ファジイ数理計画法が考えられてきている。これまでの研究では不確実性、不確定性のどちらかの場合のみ扱っているものが多いが，現実には，これら二つを同時に含む状況も多いと思われる．また、そういった状況において、不確実、不確定性が、情報として個別に切り離して扱えない場合も少なくない。本研究ではそのような不確実，不確定を同時に含む要素を表すためにファジイランダム変数を導入したファジイランダム線形計画問題について考え，この状況下での意思決定法を提案する．

2 ファジイランダム変数

ファジイランダム変数は確率変数やファジイ数を拡張したものでファジイ性とランダム性を合わせもっており、その概念は Kwakernaak[5] によって導入された。また、Puri と Ralescu[6] は別の定義を与えると共に理論的な土台を構築した。また、G.Wang と Y.Zhang[7] もファジイランダム変数について別の定義を与えている。。ファジイランダム変数の定義には様々なものがあるが、N.Watanabe[8] は包括的な定義をファジイランダム変数になるための十分条件の形で与えた。本論ではこの定義を用いることにする。

定義 2. 1 [8]
Ω は標本空間, B_Ω , B_Λ は σ集合体, P は確率測度とする。(Ω, B_Ω, P) , (Λ, B_Λ) をそれぞれ確率空間, 可測空間とするとき、Ω からΛへの可測写像 Xをファジイランダム変数という。このことは任意の $A \in B_\Lambda$. に対して $\{\omega | X(\omega) \in A\} \in B_\Omega$ が成り立つことを意味する。

次の定理 2.2 は定義 1 の十分条件になっている。

定理 2.2[8]
x を確率空間 (Ω, B_Ω, P) から可測空間 (Γ, B_Γ) への可測写像とし、X をΩ からΛへの写像とする。
もし全単射 $h:\Lambda\to\Gamma$が存在すれば、可測空間 (Λ, B_Λ) と (Ω, B_Ω, P) から (Λ, B_Λ) への写像 Xはファジイランダム変数である。

この定理から次の系 2.3 が導かれる。

系 2.3[8]

X をΩ からΛへの写像とする。. $\forall\omega\in\Omega$に対して, ファジイ集合 $X(\Omega)$ のメンバーシップ関数 $\mu_{X(\omega)}$ がある関数 $f(u;\theta)$ に対して$\mu_{X(\Omega)}(u)=f(u;x(\omega))$ と表されるとする。ここでθに関して $\theta_1\neq\theta_2$ のとき $f(u;\theta_1)\neq f(u;\theta_2)$ が成り立つならば X はファジイランダム変数である。

ファジイ集合 Xのメンバーシップ関数がパラメーターによって決定され x が確率変数ならば, 系から Xはファジイランダム変数である。系 3 における条件はかなり狭いものであるが, 応用上有用である。Kaufmann ,Gupta[10] によって導入されたハイブリット数や Puri, Ralescu[11] によって公式化されたガウス型ファジイランダム変数もこの条件を満たす。

3 定式化

次のような線形計画問題を考える。

$$\begin{aligned} P_{s1}\ :\quad & \textit{minimize} && \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ & \textit{subject to} && \mathbf{a}^t\mathbf{x}=b \\ & && \mathbf{x}\geq 0, \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_m)^t, \mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_m)^t$ and $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_m)^t$.
ここで、上の不等式の右辺 b をつぎのようなメンバーシップ関数$\mu_{B(\omega)}$に制限されるファジイランダム変数 $B(\omega)$ とする。

$$\mu_{B(\omega)}(b)=R(u(b-d(\omega))^2),$$

u は正定数、$d(\omega)$ は確率密度関数 $f(x)$、確率分布関数 $F(x)$ をもつ確率変数とする。また R は次の条件を満たす上半連続非増加関数である。

$$R:[0,+\infty)\to[0,1],\ R(0)=1,\ R(r')=0.$$

$B(\omega)$ は系の条件を満たすファジイランダム変数である。b の不確実性のために制約等式を常に満たす x は存在しない。よって、左辺と右辺との差 $y = b - \mathbf{a}^t\mathbf{x}$ が生じるが、これも b を通してファジイランダム変数となり、拡張原理によって次のようなメンバーシップ関数に制限されるファジイランダム変数 $Y(\omega)$ となる。

$$\mu_{Y(\omega)}(y) = \mu_{B(\omega)}(y + \mathbf{a}^t\mathbf{x}).$$

差 y は小さいほうが望ましい。そこで "y^2 が f_0以下である."というファジイ目標 G を設定する。G の可能性測度を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\Pi_Y(G) &= \sup_y \min\{\mu_{Y(\omega)}(y), \mu_G(y)\}\\ &= \sup_y \min\{\mu_{B(\omega)}(y + \mathbf{a}^t\mathbf{x}), \mu_G(y)\} \ \in [0,1]\end{aligned}$$

$\mu_{Y(\omega)}$ は確率変数なので$\Pi_Y(G)$ も確率変数になる。そこで P_1の意思決定法として、機会制約条件計画にもとづいて次の P_2を提案する。

$$\begin{aligned}P_{s2}\ :\quad & \mathit{maximize} && -\mathbf{c}^t\mathbf{x} + Q(\Pi_Y(G))\\ & \mathit{subject\ to} && P(\Pi_Y(G) \geq h) \geq \alpha\\ & && \mathbf{x} \geq 0,\end{aligned}$$

$Q(\cdot)$ は $-\mathbf{c}^t\mathbf{x}$ と $\Pi_Y(G)$ の間の重みのバランスの役割を果たす、単調増加関数である。$\Pi_Y(G) \geq h$ を変形すると

$$\begin{aligned}& \sup_y \min\{\mu_{B(\omega)}(y + \mathbf{a}^t\mathbf{x}), \mu_G(y)\} \geq h\\ \Leftrightarrow\ & \exists y : \mu_{B(\omega)}(y + \mathbf{a}^t\mathbf{x}) \geq h, \mu_G(y) \geq h\\ \Leftrightarrow\ & \exists y : R\{u(y + \mathbf{a}^t\mathbf{x} - d(\omega))^2\} \geq h, \mu_G(y) \geq h\\ \Leftrightarrow\ & \exists y : u(y + \mathbf{a}^t\mathbf{x} - d(\omega))^2 \leq R^*(h)\ ,\ \mu_G^*(h)^- \leq y \leq \mu_G^*(h)^+\\ \Leftrightarrow\ & \exists y : |y + \mathbf{a}^t\mathbf{x} - d(\omega)| \leq \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}}, \mu_G^*(h)^- \leq y \leq \mu_G^*(h)^+\\ \Leftrightarrow\ & \text{「}\mu_G^*(h)^- \leq -\mathbf{a}^t\mathbf{x} + d(\omega) + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}}\ \mathit{and}\ -\mathbf{a}^t\mathbf{x} + d(\omega) - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} \leq \mu_G^*(h)^+\text{」}\\ \Leftrightarrow\ & d(\omega) - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^+ \leq \mathbf{a}^t\mathbf{x} \leq d(\omega) + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^-\\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{a}^t\mathbf{x} - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G^*(h)^- \leq d(\omega) \leq \mathbf{a}^t\mathbf{x} + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G^*(h)^+\end{aligned}$$

ここで$\mu_G(r)$ は $r < -\sqrt{f_0}$ で非減少、$r > \sqrt{f_0}$で単調増加である上半連続関数である。さらに

$$R^*(h) = \begin{cases} \sup\{r | R(r) > h, r \geq 0\} & (h < 1)\\ 0 & (h = 1)\end{cases}$$

$$\mu_G^*(h)^- = \inf\{r | \mu_G(r) > h\}$$

$$\mu_G^*(h)^+ = \sup\{r | \mu_G(r) > h\}.$$

また

$$t_1(\mathbf{x},h) = \mathbf{a}^t\mathbf{x} - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^-$$
$$T(h) = 2\sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G^*(h)^+ - \mu_G^*(h)^-$$

である。P_2 は次のような P_3に変形される。

$$\begin{array}{llll} P_3 & : & maximize & -\mathbf{c}^t\mathbf{x} + Q(h) \\ & & subject\ to & P\left(t_1(\mathbf{x},h) \le d(\omega) \le t_1(\mathbf{x},h) + T(h)\right) \ge \alpha \\ & & & 0 \le h \le 1 \\ & & & \mathbf{x} \ge 0. \end{array}$$

次に P_3の制約式を機会制約条件計画の理論を用いて等価確定条件にする。

$T(h)$ は積分区間の幅の大きさであり、h の減少関数である。h が一定の時、$T(h)$ も一定になる。確率分布関数 $F(x)$ を用いると制約式は

$$F\left(t_1 + T)\right) - F(t_1) \ge \alpha$$

となる。ここで、$s(t_1) = F(t_1 + T) - F(t_1)$ とおき、 $s(t_1) \ge \alpha$ を満たす $s(t_1)$ の範囲を求める。$s(t_1)$ の導関数は

$$\frac{ds(t_1)}{dt_1} = f(t_1 + T) - f(t_1)$$

確率密度関数 fは単峰関数である。すなわち $t_1 < m$ では単調増加関数であり、$t_1 \ge m$ では単調減少関数となる。$\frac{ds(t_1)}{dt_1} = 0$ を満たす t_1を βとすると、β はただ一つに決まり、$s(t_1)$ の増減は次の表 1 のようになる。

表 1

t_1	$-\infty$	$\cdots$	β	$\cdots$	$+\infty$
$s'(t_1)$	—	+	0	−	—
$s(t_1)$	0	↗	最大	↘	0

よって $s(t_1) \ge \alpha$となる範囲は、

$$\gamma^*(h)^- \le t_1(\mathbf{x},t) \le \gamma^*(h)^+$$
$$\Updownarrow$$
$$\gamma^*(h)^- \le ax - \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} + \mu_G^*(h)^- \le \gamma^*(h)^+$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}\gamma^*(h)^- &= \inf\{t_1|s(t_1)\geq\alpha\}\\ \gamma^*(h)^+ &= \sup\{t_1|s(t_1)\geq\alpha\}\end{aligned}$$

したがって、P_3は次の問題P_4と等価となる。

$$\begin{aligned}P_4:\ \ \textit{maximize}\quad & -\mathbf{c}^t\mathbf{x}+Q(h)\\ \textit{subject to}\quad & v_1(h)\leq\mathbf{a}^t\mathbf{x}\leq v_2(h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_1(h) &= \gamma^*(h)^- + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^-\\ v_2(h) &= \gamma^*(h)^+ + \sqrt{\frac{R^*(h)}{u}} - \mu_G^*(h)^-\end{aligned}$$

P_4 の最適解を得るために、[4] の方法を用いる。そのためには v_1 と v_2 の符号の情報が必要であるが、それは確率分布に依存するので, 一般的には決定されない。

P_4 の最適解を $z(h)$ とすると、この問題は条件 $0\leq h\leq 1$ のもとで $z(h)$ を最大化する問題となる。

4　数値例

次のような問題を考える。

ある製品が 2 台の機械を使って生産されるとする。機械 A は単位時間あたり 3000 円で 3 kg , 機械 B は単位時間あたり 2000 円で 2 kg 生産する。
需要と供給の差は 20kg より小さいほうが望ましい。全体の費用を最小化するために各々の機械をどれだけの時間動かせばよいか。

需要 b は次のようなメンバーシップ関数$\mu_{B(\omega)}$に制限されるファジイランダム変数 Bである。

$$\mu_{B(\omega)}(b)=R\{(b-d(\omega))^2\}$$

$$R(t):\begin{cases}1-\dfrac{1}{100}t & (0\leq t\leq 100)\\ \quad 0 & (t<0\ ,\ t>100)\end{cases}$$

また、R, μ_Gは図 1 で与えられるような関数である。

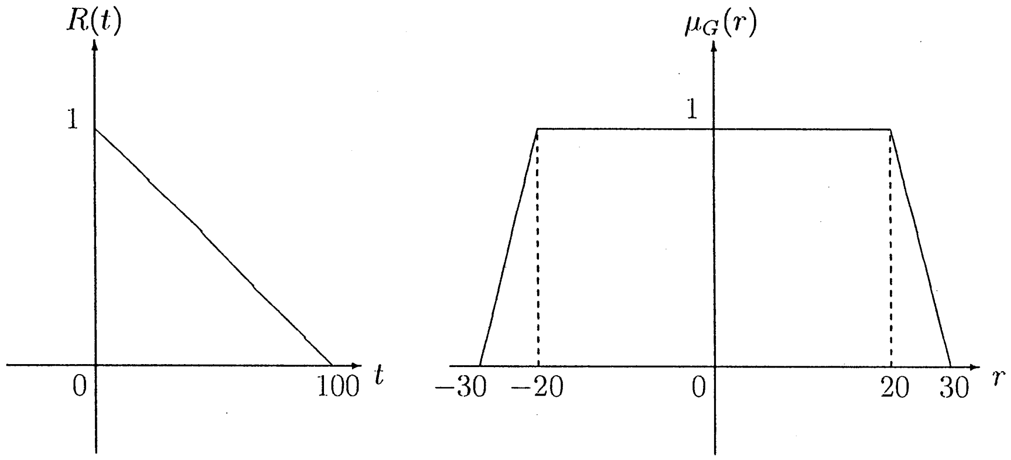

図 1

ファジイ目標は ‘y^2 がだいたい 400 以下になる。” とし、確率レベルα は 0.9 とする。擬逆関数は

$$
\begin{aligned}
R^*(h) &= -100h + 100 \quad (0 \le h \le 1) \\
\mu_G^*(h)^- &= 10h - 30 \quad (0 \le h \le 1)
\end{aligned}
$$

x_1, x_2 をそれぞれ機械 A, Bの稼働時間とすると問題は次のように定式化される。

$$
\begin{aligned}
P_{e1} \ : \quad & \mathit{minimize} && 5x_1 + 3x_2 \\
& \mathit{subject\ to} && 3x_1 + 2x_2 = b \\
& && x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

3 章で導入した最適基準を用いると, P_{e1} は P_{e2}のように変形される。

$$
\begin{aligned}
P_{e2} \ : \quad & \mathit{maximize} && -5x_1 - 3x_2 + F(\Pi_Y(G)) \\
& \mathit{subject\ to} && P\left(\Pi_Y(G) \ge h\right) \ge 0.9 \\
& && x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

数値例 1.

$\frac{d(\omega)-475}{50}$の確率密度関数はベータ分布 $Be(2,2)$ に従うとする。図 2 はメンバーシップ関数$\mu_{B(\omega)}$ の振る舞いを示している。(次ページ).

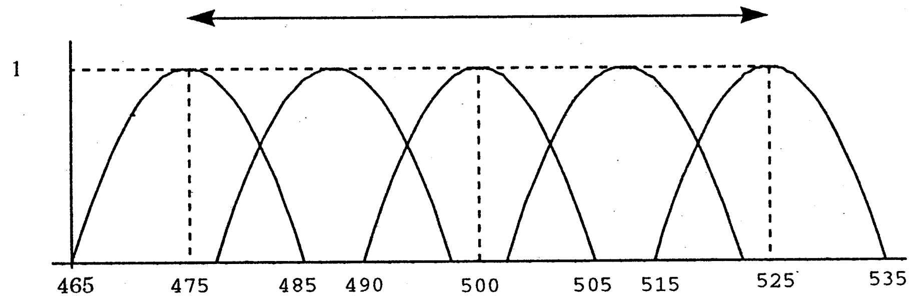

Fig 2

$Be(2,2)$ の確率密度関数 $6x(1-x)$ より、$s(t_1) = \int_{t_1}^{t_1+T} 6x(1-x)dx = 6T(t_1 - \frac{1-T}{2})^2 - \frac{1}{2}T(T^2-3)$ となる。ここで、$\alpha = \frac{9}{10}$ より, $s(t_1) = \alpha$を満たす t_1の範囲を求めると、$\gamma^*(h)^\pm = \frac{(1-T)\pm\sqrt{1-\frac{1}{3}T^2-\frac{3}{20T}}}{2}$ である。また、$T(h) = \frac{2\sqrt{1-h}-2h+6}{5}$, $t_1 = \frac{3x_1+2x_2}{50} - \frac{T}{2} - \frac{475}{50}$ である。さらに

$$Q(h) = 120h = 300 - 300T + 60\sqrt{10T-70},$$

とおいて 3 章で示した方法を用いると問題は次のように変形される。

$$
\begin{aligned}
P_{e3} \;:\quad & maximize \quad -5x_1 - 3x_2 + Q(h) \\
& subject\ to \\
& -50\sqrt{1-\frac{1}{3}T^2-\frac{3}{20T}} + 500 \le 3x_1 + 2x_2 \le 50\sqrt{1-\frac{1}{3}T^2-\frac{3}{20T}} + 500 \\
& 0 \le h \le 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

計算を簡単にするために P_3 を h で表すかわりに Tであらわす。. [4] における方法を用いると P_3において最適解 $x_1^* = 0, x_2^* = 230.627$, $h = 0.999867$ を得る事が出来る。

数値例 2.
$d(\omega)$ の確率分布関数を正規分布 $N(500, 20)$ とする。正規分布の擬逆関数を解析的に計算する事は出来ないので, 数値計算によって求める。[4] における方法を用いると最適解 $x_1^* = 0$, $x_2^* = 252.333$, $h = 0.798566$ が得られる。

5 FRPL と FLP の比較

例 1 における FRLP と FLP 比較するために次のような FLP の例を与える。

$$\mu_B(b) = R((b-500)^2)$$

$$R(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{35^2}t & (0 \le t \le 35^2) \\ 0 & (t < 0, t > 35^2) \end{cases}$$

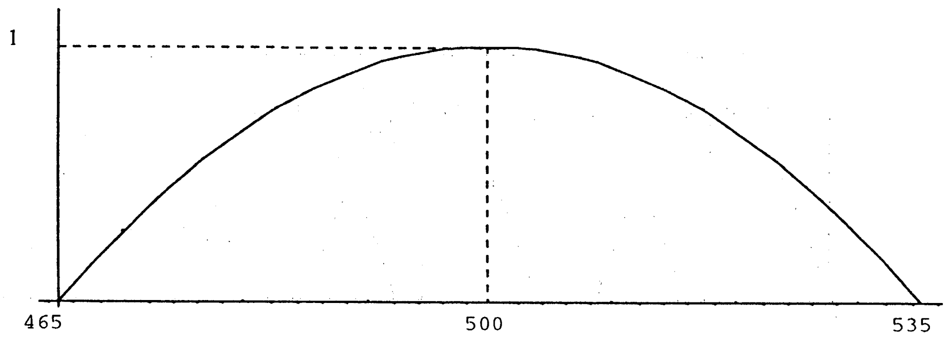

Fig 3

FLP におけるμ_Bの台の両端は FRLP と同じにしておく。また$\mu_G^*(r)$ は例 1 と例 2 と同じものにしておく。この FLP も [4] における方法によって解くことが出来る。. このとき最適解は $h = 0.828427, x_1^* = 0, x_2^* = 231.893$ となる。ここで得られた解 $x_2^* = 231.893$ を例 1 に代入すると、$h = 0.882154$ となり、例 1 で得られた最適解 $h = 0.999867$ よりも小さくなる。

上の結果から、少なくともこのモデルでは、もし確率的な情報を知ることが出来るならそれも取り入れてモデルを組立てるほうがよりよい結果が得られる事がわかる。

6 結言

この論文では不確実かつ不確定な要素を含む状況下での意思決定法を示した。本研究で述べたモデルでは最適化基準に可能性測度と確率測度を用い、機会制約条件計画としてモデル化した。さらに FRLP と FLP の最適解を比較し、不確実、不確定が同時に存在する基での意思決定法として FRLP を用いる方がよい場合があることを示した。現実のシステムにおいては一般的に多制約条件となるため、そのような問題に対する実用的なモデルを構築することが必要であると思われる。

参考文献

[1] G.B.Dantzig, *Linnear Programing under Uncertainty*, Management Science, **1**(1955), 197-206.

[2] D.Dubois, H.Prade, *Fuzzy Sets and Systems*, Academic Press, U.S.A.(1980).

[3] 石井博昭, "「講座　数理計画法 10, 数理計画法の応用〈理論編〉」伊理正夫, 今野浩編, 第一章確率論的最適化" 産業図書 (1982).

[4] T.Itoh, H.Ishii, *Fuzzy Two-stage Problem by Possibility Measure* , Mathematica Japonica (to appear).

[5] H.Kwakernaak, *Fuzzy random variable-1. Definitions and theorems* , Information Sciences 15(1978) 1-29

[6] M.L.Puri, D.A.Ralescu, *Fuzzy random variables*, J.Math.Anal. Appl.114(1986) 409-422

[7] G.Wang, Y.Zhang,*The theory of fuzzy stochastic process*, Fuzzy Sets and Systems 51(1992) 167-180.

[8] N.Watababe, *Fuzzy Random Variables and Statistical Inference* , 日本ファジイ学会誌 8(1996) 126-135.

[9] R.Kruse, K.D.Meyer.*Statistics with Vague Data* D.Reidel Publishing company, 1987.

[10] A.Kaufman, M.M.Gupta. *Introduction to Fuzzy Arithmetic* : Theory and Application, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1985.

[11] M.L.Puri, D.A.Ralescu, *The concept of normality for fuzzy random variables*, Annals of Probability 13(1985) 1373-1379.

[12] H.J.Zimmarnman, *Fuzzy Set Theory - and Its Applications*, 2nd ed., Kluwer Academic Publishers, U.S.A., 1991.

[13] G.Wang , Z.Oiao, *Linnear programming with fuzzy random variable coefficient*, Fuzzy Sets System 57(1993) 295-311

[14] Z.Oiao, Y.Zhang, G.Wang, *On fuzzy random linnear programming* , Fuzzy Sets and Systems 65(1994) 31-49

[15] M.K.Luhandjula *Fuzziness and randomness in an optimization framework*, Fuzzy Sets and Systems 77(1996) 291-297

[16] M. Inuiguchi *Relationships between modality constrained programming problems and barious fuzzy mathematical programming problems*, Fuzzy Sets and Systems 49(1992) 243-259

[17] 太田、山口、高野 “係数間の関係を考慮したファジイ多目標計画法”, 日本ファジイ学会誌 6(1994) 166-176

[18] 山、太田、山口 “ファジイ多目的確率制約条件計画問題”, 日本ファジイ学会誌 6(1994) 1193-1201

[19] R. Slowinski and J. Teghem, Jr. *Fuzzy Versus Stochastic Approaches to Multicriteia Linnear Programming under Uncertainty*, Naval Research Logistics 35(1988) 673-695